УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЕДУЩЕГО УСТРОЙСТВА И МЕТАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

В.Н. Барашков

НИИ прикладной математики и механики при Томском государственном университете
E-mail: ger@mail.tomsknet.ru

Рассмотрена статическая упругопластическая задача для двух контактирующих с натягом неоднородных по физико-механическим характеристикам цилиндрических тел. Для вычисления контактного давления предложен алгоритм, который реализует идею определения положения контактной поверхности путем итерационного выравнивания одинаковых в положении равновесия радиальных напряжений контактирующих тел. Численное решение осуществляется вариационно-разностным методом с использованием соотношений деформационной теории пластичности и уравнений Коши. Получены параметры напряженно-деформированного состояния обоих тел, а также распределение реакции ведущего устройства по его ширине для разных материалов. Результаты численного анализа приведены в виде графиков.

1. Введение

Решение динамической задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) метаемого элемента (МЭ) в трубе метательной установки (МУ) можно проводить в квазистатической постановке, обоснование которой представлено в [1–3]. При этом на него действуют давление газов, реакция ведущего устройства (ВУ) и появляющиеся осевые массовые силы, которые являются следствием использования связанной с МЭ неинерциальной системы координат r, φ, z.

Среди перечисленных силовых нагрузок, действующих на МЭ при метании, реакция ВУ имеет значительную величину и играет важную роль. От ее воздействия в корпусе МЭ могут возникать остаточные пластические деформации. Поэтому знание величины реакции ВУ необходимо как при конструировании МЭ, так и для проведения прочностных расчетов корпуса МЭ и трубы МУ. Для определения реакции ВУ применяются теоретико-экспериментальные методики, использующие результаты эксперимента и аналитические методы, основанные на соотношениях сопротивления материалов и (или) уравнениях теории оболочек. Применяются также методики, которые с помощью реализующих уравнения теории упругости и пластичности современных численных методов в сочетании с результатами эксперимента позволяют не только определять искомую реакцию ВУ, но и проводить анализ НДС МЭ.

2. Алгоритм определения реакции ВУ

Представленный алгоритм определения реакции ВУ p изложен для совместного осесимметричного упругопластического деформирования системы "труба МУ – ВУ – корпус МЭ – снаряжение" (рис. 1).

Суть реализуемой задачи взаимодействия трубы и корпуса МЭ формулируется следующим образом: найти расположение контактной поверхности AB (рис. 1, *б*) этой системы при посадке их друг на друга с натягом, равным величине 2δ. В модельной осесимметричной задаче рассматриваются участки трубы МУ и корпуса МЭ, прилегающие к ВУ. На рис. 1, *а* эти элементы представлены до их посадки друг на друга. МЭ (верхний цилиндр на рис. 1, *а*) состоит из корпуса (1), снаряжения (2) и ВУ (3). Нижний цилиндр (4) представляет трубу МУ. При рассмотрении такой модели взаимодействия трубы с корпусом МЭ через ВУ принимаются следующие допущения: 1) материал ВУ в процессе посадки не уносится с его поверхности; 2) внутренняя поверхность трубы является цилиндрической; 3) не учитывается давление газа и действие массовых сил на трубу и корпус МЭ ввиду малости этих нагрузок по сравнению с реакцией p на данном этапе движения МЭ.

Оценочные расчеты показывают, что при длительности процесса метания 0,06 с (что приемлемо для пороховых систем) и скорости упругого возмущения в металле МЭ порядка 5000 м/с время пробега волны по длине МЭ (это максимум 0,5 м) составит около 0,0001 с, а за время метания получится 600 пробегов. В этих условиях нет смысла рассматривать волновую (динамическую) постановку, и, учитывая все вышесказанное, задачу можно решать в статической постановке.

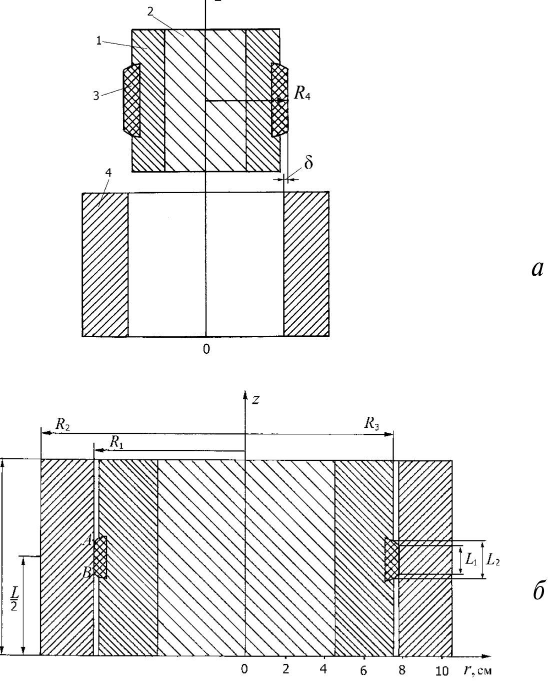


Рис. 1. *Расчетная схема конструкции до (а) и после (б) посадки друг на друга*

Решение задачи о посадке с натягом для контактирующих по всей длине боковой поверхности цилиндров в упругой постановке получено в виде конечных аналитических зависимостей в курсах "Сопротивления материалов" и "Теории упругости" [2, 4] при анализе составных цилиндров. При этом величина натяга Δ (разность диаметров посадочных поверхностей наружного и внутреннего цилиндров) в цилиндрической системе координат r, z удовлетворяет следующему тождеству:

$$\Delta = 2(u_2 - u_1), \qquad (1)$$

где u_1, u_2 – радиальные перемещения посадочных поверхностей внутреннего и наружного цилиндров соответственно; $u_1 < 0$, а $u_2 > 0$. На посадочной (контактной) поверхности АВ, определяемой перемещениями u_1, u_2, в условиях равновесия имеет место равенство радиальных напряжений

$$\sigma_{r1} - \sigma_{r2} = 0, \qquad (2)$$

где σ_{r1}, σ_{r2} – сжимающие напряжения на посадочных поверхностях внутреннего и наружного цилиндров соответственно.

Для решения задачи предлагается алгоритм, протестированный на решении упругой задачи о посадке двух цилиндров по всей их длине, для которой имеется аналитическое решение, и апробированный на решении упругой задачи о посадке с натягом двух цилиндров для случая контакта между ними по части поверхности [5, 6]. На исследуемую область наносится конечно-разностная сетка. Задавая в I узлах контактной поверхности ВУ радиальные перемещения u_{1i} (i =1, 2, ..., I), определяем НДС МЭ, в том числе радиальные напряжения σ_{r1i} на внешней контактной поверхности АВ ВУ. Далее, используя уравнение (1), находим величины перемещений u_{2i} на контактной поверхности трубы МУ

$$u_{2i} = \Delta/2 + u_{1i},\ \ i = 1, 2, ..., I, \qquad (3)$$

и, определяя ее НДС, вычисляем радиальные напряжения σ_{r2i} на внутренней контактной поверхности АВ трубы МУ. Затем проверяется условие (2). Если оно не выполняется с заранее заданной точностью, проводится корректировка заданных на контактной поверхности перемещений, допустим u_{1i}, по формуле

$$u_{1i}^{(k+1)}=u_{1i}^{(k)}(1-c_i),\ c_i=B(\sigma_{r1i}^{(k)}-\sigma_{r2i}^{(k)})/(\sigma_{r1i}^{(k)}+\sigma_{r2i}^{(k)}),\ i=1,2,...,I, \qquad (4)$$

где k – индекс, определяющий номер итерации; c_i – корректирующие добавки, на величину которых изменяются радиальные перемещения u_{1i}; B – математическая вязкость, вводимая для ускорения сходимости. Величина c_i положительна, если $|\sigma_{r1i}|>|\sigma_{r2i}|$, и отрицательна – в противоположном случае.

Корректирующая формула (4) работает следующим образом. Если в i-ом узле контактной поверхности вычисленные радиальные напряжения удовлетворяют неравенству $|\sigma_{r1i}^{(k)}|>|\sigma_{r2i}^{(k)}|$, использование формулы (4) приводит к уменьшению абсолютной величины перемещения $u_{1i}^{(k+1)}$ и, согласно выражению (3), увеличению перемещения $u_{2i}^{(k+1)}$. В результате расчета НДС двух тел с новыми значениями заданных на контактной поверхности перемещений $u_{1i}^{(k+1)}$, $u_{2i}^{(k+1)}$ абсолютная величина напряжения $\sigma_{r1i}^{(k+1)}$ несколько уменьшится, напряжения $\sigma_{r2i}^{(k+1)}$ – увеличится, а разница $\Delta\sigma_{ri}^{(k+1)}=|\sigma_{r1i}^{(k+1)}-\sigma_{r2i}^{(k+1)}|$ станет ближе к нулю. Аналогично происходит выравнивание напряжений в случае, когда $|\sigma_{r1i}^{(k)}|<|\sigma_{r2i}^{(k)}|$. Итак, с помощью формулы (4) корректируются, по сути дела, все $2I$ радиальные перемещения контактных поверхностей обоих тел.

Описанный процесс определения НДС каждого из двух контактирующих тел повторяется до тех пор, пока условие (2) не будет выполнено. Итогом этого итерационного процесса является искомая величина реакции ВУ $p\approx\sigma_{r1}\approx\sigma_{r2}$. Представленный алгоритм аналогичен предложенному в [7] подходу.

Изложенная методика в части определения упругопластического осесимметричного НДС обоих цилиндрических тел реализовывалась с помощью вариационно-разностного метода (ВРМ) с использованием соотношений деформационной теории пластичности и уравнений Коши [8–11]. При дискретизации функционала энергии для производных применялись так называемые естественные аппроксимации [12].

3. Численный пример

Представленный алгоритм был применен для решения модельной задачи о взаимодействии ВУ МЭ и трубы МУ. Параметры, описывающие геометрию трубы и части корпуса МЭ, принимались следующими: δ = 0,025 см; внутренний радиус трубы R_1 =7,775 см; внешний радиус трубы R_2 =10,5 см; радиус корпуса МЭ R_3 =7,5 см; радиус МЭ по ВУ R_4 $=R_1+\delta$ =7,8 см; длина L =10,0 см, ширина ВУ L_1=1,4 см; L_2=2,0 см. Параметр L был определен путем численного эксперимента. В качестве L принята такая его величина, увеличение которой уже не влияет на результаты расчетов. Физико-механические характеристики (ФМХ) материала трубы МУ, корпуса МЭ, ВУ и снаряжения приведены в таблице, где E – модуль упругости; E_1 – модуль упрочнения; μ – коэффициент Пуассона; e_s – деформация начала текучести. Материалом трубы МУ является сталь с довольно высоким пределом текучести.

Таблица. *Физико-механические характеристики конструкции*

ФМХ	Труба МУ	Корпус МЭ	Снаряжение	ВУ	
				Медь	Пластик
E, МПа	2,02 10^5	2,02 10^5	875	10^5	8,16 10^4
E_1, МПа	8,0 10^3	8,0 10^3	250	8,0 10^3	2,04 10^3
	0,333	0,333	0,350	0,330	0,230
e_s	0,00700	0,00173	0,00400	0,00173	0,01500

Задача решалась при следующих граничных условиях для обоих торцов трубы МУ и МЭ:

$$z=0,L:\ u(r,0)=u(r,L)=w(r,0)=w(r,0)=0, \qquad (5)$$

$$z=0,L:\ w(r,0)=w(r,L)=0,\ \sigma_{rz}(r,0)=\sigma_{rz}(r,L)=0, \qquad (6)$$

т.е. жесткой заделки и возможности перемещения их в радиальном направлении соответственно, ибо реальные условия на границе расчетной области такими двумя постановками (5) и (6) берутся "в вилку".

На оси вращения $0z$ задаются условия симметрии:

$$r = 0:\ u(0,z) = 0,\ \sigma_{rz}(0,z) = 0.$$

Внешняя поверхность трубы свободна от нагрузок:

$$\sigma_r(R_2,z) = 0,\ \sigma_{rz}(R_2,z) = 0,$$

также, как и ее внутренняя поверхность $r=R_1$ и внешняя поверхность корпуса МЭ $r=R_3$, кроме участков длиной L_1, по которым осуществляется контакт трубы МУ и МЭ. На этих участках реализуются следующие условия:

$$(L+L_1)/2 \geq z \geq (L-L_1)/2:\ u_2(r_k,z)-u_1(r_k,z)=\delta,$$

$$\sigma_{r1}(r_k,z)-\sigma_{r2}(r_k,z)=0,\ \sigma_{rz1}(r_k,z)=\sigma_{rz2}(r_k,z)=0,$$

где $\sigma_{rz1}(r_k,z)$, $\sigma_{rz2}(r_k,z)$ – сдвиговые напряжения на контактной поверхности ВУ и трубы соответственно; r_k – искомые радиальные координаты узлов контактной поверхности. На контактных поверхностях корпуса МЭ со снаряжением и ведущим устройством задаются условия непрерывного контакта.

Приведенные ниже результаты численного анализа получены для варианта (5) граничных условий на торцах z=0, L и, ввиду симметрии НДС рассматриваемой системы относительно координаты $z=L/2$, представлены лишь для половины длины конструкции. ВУ изготовлено из меди.

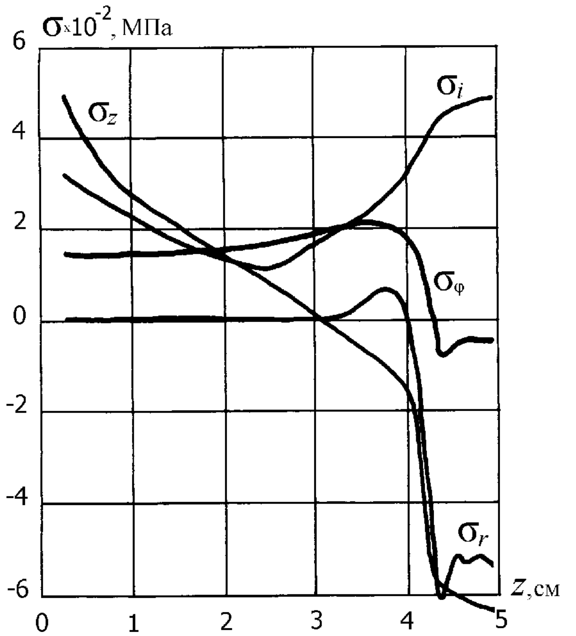


Рис. 2. *Распределение напряжений у внутренней поверхности трубы (r = 7,8 см)*

На рис. 2 изображены зависимости радиальных σ_r, осевых σ_z, окружных σ_φ напряжений и интенсивностей напряжений σ_i в трубе от осевой координаты z для r = 7,8 см, т.е. у внутренней поверхности трубы МУ. О характере распределения и величине искомой реакции p можно судить по поведению кривой радиального напряжения σ_r на контактной поверхности для $L/2 \geq z \geq (L-L_1)/2$. Величина напряжения σ_r, почти нулевая на отдалении от места контакта с ВУ, приближаясь к контактной поверхности, достигает наибольшего значения в точках, соответствующих координатам $z \approx (L-L_1)/2$, и несколько уменьшается к средней по ширине части $z=L/2$ ВУ. Такое распределение контактного давления p_k характерно для случая посадки с натягом друг на друга двух цилиндров для случая контакта между ними по части поверхности [2, 4]. Осредненная по ширине ВУ величина реакции $p^{ср} \approx -540$ МПа. Распределение напряжений в корпусе МЭ для цилиндрической поверхности с радиусом r=6,9 см, в том числе под канавкой для ВУ, представлено на рис. 3.

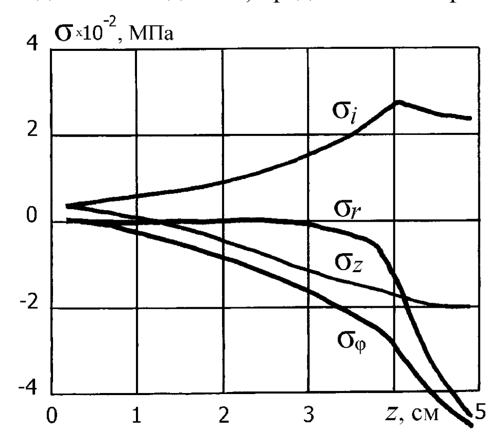


Рис. 3. *Распределение напряжений в корпусе МЭ для поверхности r = 6,9 см*

На рис. 4 приведены эпюры напряжений по толщине МЭ и трубы МУ в их средней по длине части ($z=L/2$). Заштрихованные зоны обозначают снаряжение (4,5 см$\geq r \geq$0) и ВУ (7,8 см$\geq r \geq$7,1 см), между которыми находится корпус (не заштрихованная часть). Радиальные напряжения σ_r на контактной поверхности в МЭ и трубе достигают величины около –540 МПа. Такую же величину имеет напряжение σ_r у внутренней поверхности трубы для $z \approx 5$ см на рис. 2. В снаряжении напряжения малы. При переходе через разделяющую снаряжение и корпус МЭ поверхность все напряжения, кроме δ_r, возрастают примерно на два порядка и больше. Так, величина интенсивности напряжений σ_i с 2 МПа в снаряжении возрастает примерно до 350 МПа в корпусе МЭ.

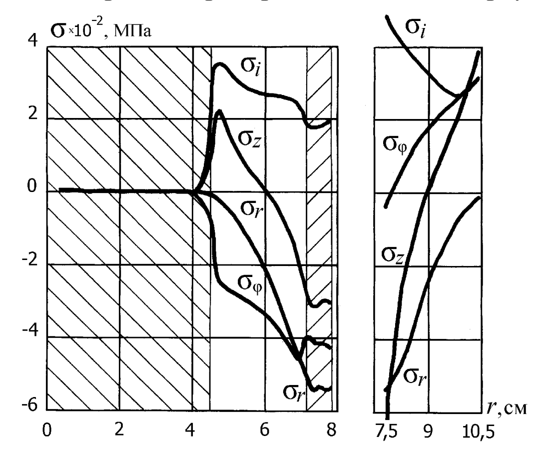


Рис. 4. *Распределение напряжений по толщине корпуса МЭ и трубы МУ для z = L/2. Слева от оси вращения системы на право изображены последовательно снаряжение, корпус МЭ, ВУ и труба МУ. Снаряжение и ВУ показаны штриховкой*

Анализ полученных напряжений для трубы позволил сделать вывод об увеличении их значений при приближении к центру конструкции для $z=L/2$ и уменьшению радиальных напряжений σ_r при движении от внутренней поверхности трубы, где имеет место контакт с ВУ, к свободной от нагрузок наружной поверхности, что согласуется с реальной картиной распределения напряжений.

Радиальные перемещения внутреннего контура трубы МУ (кривая 1) и внешнего контура МЭ (кривая 2) изображены на рис. 5. Их значения для $L/2 \geq z \geq (L-L_1)/2$ удовлетворяют тождеству (1). Анализ результатов позволил выделить зоны пластического деформирования конструкции: всё ВУ ($e_{i\,\max}=0{,}02$) и часть корпуса МЭ под ВУ.

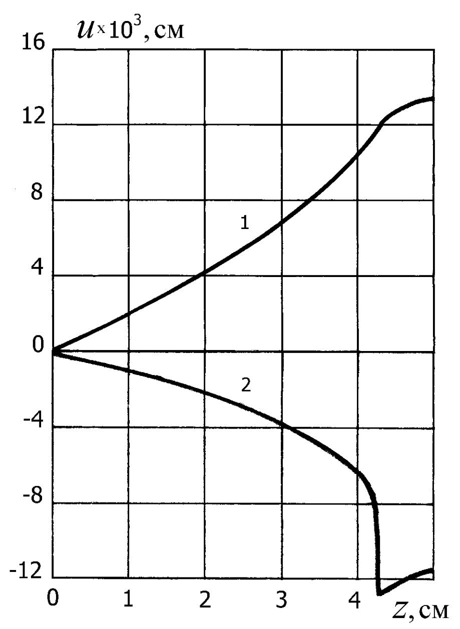


Рис. 5. *Радиальные перемещения: 1) внутреннего контура трубы МУ; 2) внешнего контура корпуса МЭ*

На рис. 6 представлены распределения реакции p по ширине ВУ для разных материалов. Зависимость $p(z)$, описанная кривой 2, получена для медного ВУ. Кривая 1 получена также для медного ВУ, но при отсутствии снаряжения. Величина реакции в этом случае получается несколько большей, нежели при наличии снаряжения. Для случая, когда ВУ выполнено из пластика на основе полиэтилентерефталата (см. таблицу), распределение реакции p описывается кривой 3. Кривой 4 представлено распределение реакции для ортотропного материала ВУ.

Осевые перемещения в узлах на контактной поверхности МУ и ВУ имеют величину одного порядка, и на один-два порядка меньше (по абсолютной величине), нежели радиальные перемещения. Это соотношение между величинами перемещений имеет место для таких различных по своим ФМХ контактирующих пар как сталь-медь и сталь-полиэтилентерефталат. В ячейках у контактной поверхности величины осевых и радиальных деформаций пары сталь-медь одного порядка. Для пары сталь-полиэтилентерефталат осевые и радиальные деформации трубы МУ становятся на порядок меньше, нежели в случае медного ВУ. Поэтому можно считать, что значительного (по сравнению с размерами ячейки конечно-разностной сетки) расхождения узлов двух тел в осевом направлении на поверхности контакта нет.

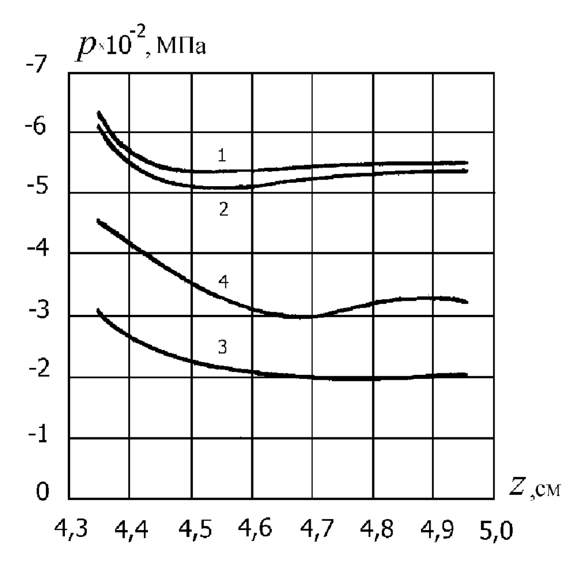


Рис. 6. *Распределение реакции ведущего устройства по его ширине для: 1) медного ВУ при отсутствии снаряжения; 2) медного ВУ; 3) ВУ из полиэтилентерефталата; 4) ВУ из ортотропного материала*

Деформации и напряжения в трубе МУ и МЭ для граничных условий (6) имеют несколько меньшие значения. При таком способе закрепления торцов материал снаряжения начинает больше воспринимать нагрузку, несколько разгружая тем самым корпус МЭ под ВУ. В дополнение к зонам пластического деформирования, имеющим место для случая задания граничных условий (5), пластические деформации возникают также в снаряжении у оси вращения для $z \approx L/2$. Материал же трубы МУ для обоих случаев закрепления торцов не получает пластических деформаций, что соответствует требованиям эксплуатации. Характер распределения искомой реакции $p(z)$ на контактной поверхности качественно остается таким же, как и при жесткой заделке торцов, но количественно ее величина становится несколько меньше. Так, средняя величина реакции ВУ $p^{cp} \approx -492$ МПа. Таким образом, использование граничных условий (5) и (6) позволяет получить своего рода крайние значения для оценки реальных параметров НДС.

Расчет реакции p для этой модельной задачи по методике А.А. Ильюшина дает величину $p^T=-475{,}6$ МПа, которая меньше аналогичных величин, полученных с помощью численной методики для условий закрепления торцов (5) и (6) на 12,0 % и 3,5 % соответственно. Реакция p^T вычисляется с использованием уравнений теории оболочек, гипотезы которой приводят к ужесточению конструкции и, таким образом, к некоторому занижению величин определяемых параметров НДС.

Описанные численные результаты получены с погрешностями ε=2,5 % выполнения равенства (2) и $\varepsilon_{u,w}$=5 % для вычисления перемещений в двух последовательных упругопластических задачах. Для получения решения задачи с заданной точностью корректировка 2I радиальных перемещений u_1, u_2 на контактной поверхности "труба МУ – ВУ" по формулам (3) и (4) проводилась 14 раз. О степени выполнения статических граничных условий можно судить на примере радиальных напряжений σ_r. Следует отметить, что одним из достоинств ВРМ решения задачи определения НДС является автоматическое выполнение статических граничных условий (также как и выполнение уравнений равновесия) при минимизации функционала полной потенциальной энергии системы.

4. Выводы

Построенная достаточно строгая и полная в математическом смысле модель и созданная численная методика позволяют определять реакцию ведущего устройства на основе информации о физико-механических характеристиках материалов и геометрии системы "труба метательной установки – ведущее устройство – корпус метаемого элемента – снаряжение" без проведения дополнительных экспериментальных исследований.

Вычислительный алгоритм достаточно эффективен и его следует трактовать гораздо шире. Он позволяет на первом этапе движения метаемого элемента в трубе метательной установки не только получить закон распределения реакции ведущего устройства вдоль контактной поверхности "труба метательной установки – ведущее устройство", но и провести анализ осесимметричного упругопластического напряженно-деформированного состояния трубы и метаемого элемента в окрестности ведущего устройства, что само по себе представляет практический интерес. Предложенная методика позволяет прогнозировать параметры напряженно-деформированного состояния и, в частности, оценивать реакцию ведущего устройства для метаемых элементов нетрадиционной формы и компоновки, изготовленных с применением новых материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 536 с.
2. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин: Учеб. пособие. – М.: Машиностроение, 1973. – 456 с.
3. Барашков В.Н. Численный анализ деформирования метаемого поддона // Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения: Сб. докл. II научн. конф. Волжского регион. центра РАРАН, г. Саров, 29 мая–01 июня 2001 г. – Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003. – С. 71–78.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
5. Барашков В.Н., Люкшин Б.А. Решение контактной задачи теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом // Механика деформируемого твердого тела: Сб. статей / Томск: Изд-во Том. ун-та. – 1990. – С. 3–9.
6. Барашков В.Н. Алгоритм реализации контактной упругопластической задачи вариационно-разностным методом // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6. – Ч. 2. – С. 49–53.
7. Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задаче о сопряжении и контакте твердых тел // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – № 1. – С. 13–18.
8. Гриффин Д.С., Келлог Р.Б. Численное решение осесимметричных и плоских задач упругости // Механика: Сб. переводов. – М., 1968. – № 2 (108). – С. 111–125.
9. Барашков В.Н. К расчету упругопластических осесимметричных деформаций тел вращения // Теория упругости и пластичности: Сб. статей / Томск: Изд-во Том. ун-та. – 1978. – С. 3–10.
10. Барашков В.Н. Алгоритм реализации задачи теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Ч. I // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 3. – С. 23–28.
11. Барашков В.Н. Алгоритм реализации задачи теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Ч. II // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 4. – С. 23–27.
12. Нох В.Ф. СЭЛ – совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике: Сб. статей / М.: Мир. – 1967. – С. 128–184.